



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 16 FEBRUARIE 2019
Clasa a VIII-a

Problema 1.

- a) Arată că $(x+3)(5x-1) = 5x^2 + 14x - 3$, oricare ar fi numărul real x .
- b) Dacă a și b sunt numere reale nenule și $a+b \neq 0$, atunci demonstrează că: $\frac{5}{a} + \frac{12}{a+b} = \frac{3}{b}$ dacă și numai dacă $a=5b$ sau $b=-3a$.
- c) Determină toate numerele $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, cu proprietatea $\frac{5}{[x]} + \frac{12}{x} = \frac{3}{\{x\}}$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x , iar $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x .

Relu Ciupea, Oltenița

Soluție: a) $(x+3)(5x-1) = 5x^2 - x + 15x - 3 = 5x^2 + 14x - 3$;

b) $\frac{5}{a} + \frac{12}{a+b} = \frac{3}{b} \Leftrightarrow 5b(a+b) + 12ab = 3a(a+b) \Leftrightarrow 5b^2 + 14ab - 3a^2 = 0 \Leftrightarrow (b+3a)(a-5b) = 0 \Leftrightarrow a=5b$ sau $b=-3a$;

c) Pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ se notează cu $[x] = a \in \mathbb{Z}^*$ și $\{x\} = b \in (0, 1) \Rightarrow \frac{5}{[x]} + \frac{12}{x} = \frac{3}{\{x\}} \Leftrightarrow \frac{5}{a} + \frac{12}{a+b} = \frac{3}{b} \Leftrightarrow$

$a=5b$ sau $b=-3a$ fals, $\Leftrightarrow b = \frac{a}{5}$;

$a \in \mathbb{Z}^*, b \in (0, 1)$ și $b = \frac{a}{5} \Leftrightarrow (a, b) \in \left\{ \left(1, \frac{1}{5}\right), \left(2, \frac{2}{5}\right), \left(3, \frac{3}{5}\right), \left(4, \frac{4}{5}\right) \right\} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{6}{5}, \frac{12}{5}, \frac{18}{5}, \frac{24}{5} \right\}$.

Problema 2. Arată că un triunghi care are lungimile înălțimilor egale cu $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, respectiv $\sqrt{30}$, este un triunghi dreptunghic.

Florin Marcu, Călărași

Soluție: Fie $\triangle ABC$ și $AM \perp BC$, $M \in BC$; $BN \perp AC$, $N \in AC$; $CP \perp AB$, $P \in AB$;

$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AM \cdot BC}{2} = \frac{BN \cdot AC}{2} = \frac{CP \cdot AB}{2}$ (1); Dacă se notează $2 \cdot \mathcal{A}_{ABC} = s$ și presupunem că: presupunem

că $AM = \sqrt{5}$, $BN = \sqrt{6}$ și $CP = \sqrt{30} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow BC = \frac{\sqrt{5}}{5}s$, $AC = \frac{\sqrt{6}}{6}s$, $AB = \frac{\sqrt{30}}{30}s \Rightarrow AC^2 + AB^2 =$

$= \frac{1}{6}s^2 + \frac{1}{30}s^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}s\right)^2 = BC^2 \Rightarrow m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$.

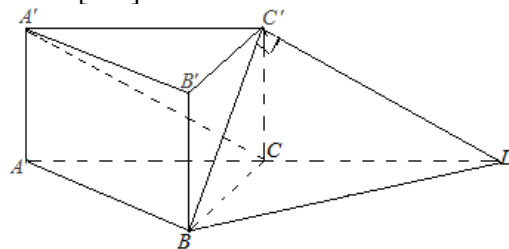
Problema 3. Fie prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu $AB = 8$ cm. Dacă măsura unghiului dintre dreptele BC' și $A'C$ este egală cu 90° , calculeți lungimea segmentului $[AA']$.

Soluție: fie $C'D \parallel A'C$, $D \in AC \Rightarrow A'CDC'$ paralelogram $\Rightarrow m(\sphericalangle(BC', A'C)) = m(\sphericalangle(BC', C'D)) = m(\sphericalangle(BC'D)) = 90^\circ$;
 $BC = AC = CD \Rightarrow \triangle ABD$ este dreptunghic în B ; $AB = 8$ cm,
 $AD = 16$ cm $\Rightarrow BD = 8\sqrt{3}$ cm;

$\triangle BC'D$ este dreptunghic isoscel $\Rightarrow BD = BC' \cdot \sqrt{2}$ cm;

$BD = 8\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow BC' = 4\sqrt{6}$ cm

Aplicând TP în $\triangle BCC'$ se obține $CC' = 4\sqrt{2}$ cm $= AA'$



Bucureșteanu Luminița, Călărași

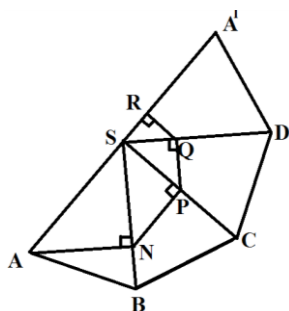
Problema 4. Fie $SABCD$ o piramidă patrulateră regulată având muchia laterală egală cu a cm ($a > 0$). În prima etapă o furnică pleacă din A și se deplasează pe față laterală ASB , pe drumul cel mai scurt, până ajunge

În punctul $N \in (SB)$. În doua etapă furnica pleacă din N și se deplasează pe față laterală BSC , pe drumul cel mai scurt, până ajunge în punctul $P \in (SC)$. În treia etapă furnica pleacă din P și se deplasează pe față laterală CSD , pe drumul cel mai scurt, până ajunge în punctul $Q \in (SD)$, iar în ultima etapă furnica pleacă din Q și se deplasează pe față laterală DSA , pe drumul cel mai scurt, până ajunge în punctul $R \in (SA)$. Dacă $SA = 4 \cdot SR$, calculați:

- suma ariilor fețelor laterale ale piramidei;
- lungimea drumului parcurs de furnică.

Sorin Furtună, Călărași și Stelică Pană, Chirnogi

Soluție:



a) Faptul că furnica se deplasează pe drumul cel mai scurt pe fiecare față înseamnă că $AN \perp SB, N \in (SB), NP \perp SC, P \in (SC), PQ \perp SD, Q \in (SD)$ și $QR \perp SA$, adică $QR \perp SA', R \in (SA')$ unde $SA' = SA$.

Dacă $SR = \frac{a}{4}$ atunci deducem că în $\triangle SQR, \cos S = \frac{SR}{SQ} \Rightarrow$

$$\Rightarrow SQ = \frac{SR}{\cos S} = \frac{a}{4 \cos S}, \text{ apoi în}$$

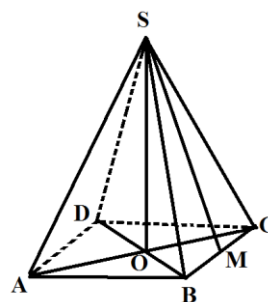
$$\triangle SPQ, \cos S = \frac{SQ}{SP} \Rightarrow SP = \frac{a}{4 \cos^2 S}, \text{ în } \triangle SNP, \cos S = \frac{SP}{SN} \Rightarrow SN = \frac{a}{4 \cos^3 S}, \text{ iar în}$$

$$\triangle SAN \cos S = \frac{SN}{SA} \Rightarrow SA = \frac{a}{4 \cos^4 S} = a \Rightarrow 4 \cos^4 S = 1 \Rightarrow \cos^4 S = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos S = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow m(S) = 45^\circ$$

$$A_{\triangle ASB} = \frac{SA \cdot SB \sin ASB}{2} = \frac{a^2 \sqrt{2}}{4} \Rightarrow A_l = a^2 \sqrt{2}$$

b) Drumul parcurs de furnică este

$$\begin{aligned} RQ + QP + PN + AN &= \frac{a}{4} + \frac{a\sqrt{2}}{4} + \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{3a}{4} + \frac{3a\sqrt{2}}{4} = \frac{3a}{4}(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$



Probleme au fost selectate și prelucrate de inspectorul școlar Gheorghe Stoianovici

Succes

Baremul de notare este: Problema 1. a) 1 punct, b) 3 puncte, c) 3 puncte; **Problema 2.** 7 puncte; **Problema 3.** 7 puncte; **Problema 4.** a) 4 puncte, b) 3 puncte.